Lista nr 6 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (4 pkt.) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |-2x^2 + 3x + 5|$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja f przyjmuje w przedziale [-2, 5]. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru $\boldsymbol{m}$, dla których równanie $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{m}|$ ma albo dwa różne rozwiązania dodatnie albo dokładnie trzy rozwiązania, z których każde dwa są różne.

Zad. 2 (3 pkt.) Wykaż, że dla dwóch różnych liczb a, b $\in \mathbb{R}$ takich, że $a + b > 1$, prawdziwa jest nierówność $a^3 + 2ab + b^3 > a^2 + ab\,(a + b) + b^2$.

Zad. 3 (3 pkt.) Maszyna napełnia plastikowe kubki jogurtem truskawkowym. Każdy kubek według normy ma zostać napełniony do co najmniej ¾ jego objętości. Kubek zawierający mniej jogurtu to produkt wadliwy. Prawdopodobieństwo tego, że pojedynczy kubek napełniony przez tę maszynę jest produktem wadliwym wynosi 0,2. Kontroli poddano 12 losowo wybranych kubków z jogurtem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 12 produktów znajdą się co najwyżej dwa produkty wadliwe.

Zad. 4 (4 pkt.) Rozwiąż równanie $12\sin x + 4\sqrt{3}\cos x + 15\operatorname{tg} x + 5\sqrt{3} = 0$.

Zad. 5 (4 pkt.) W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki BC, AC i AB tego trójkąta odpowiednio w punktach R, S oraz T. Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Na czworokątach CSPR oraz BRPT można opisać okrąg. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Zad. 6 (4 pkt.) W pewnej mleczarni ze względu na możliwości produkcyjne dzienna wielkość produkcji wynosi co najmniej 480 pudełek mleka i nie przekracza 530 pudełek. Przy poziomie produkcji $(480 + x)$ sztuk dziennie przeciętny koszt K, w złotówkach, wytworzenia pudełka mleka jest równy

$$K(x) = (22x^2 - 621{,}5x + 23\,430)/(480 + x),$$

gdzie $x \in [0, 50]$. Ile pudełek mleka dziennie powinna wytworzyć mleczarnia, aby przeciętny koszt produkcji pudełka mleka był jak najmniejszy. Oblicz ten najmniejszy przeciętny koszt.

Zad. 7 (5 pkt.) Rozwiąż nierówność:

a)
$$\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geqslant \frac{3}{2+x} + 2.$$

b)
$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} < 0.$$

Zad. 8 (5 pkt.) Znajdź te wartości parametru rzeczywistego m, dla których równanie

$$x^2 + 3x + \frac{2-m}{m-3} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że $x_1^3 + x_2^3 > -9$.

Zad. 9 (5 pkt.) Krawędź podstawy ABCD ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ABCDP ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus wynosi $\sqrt{5}/5$. Przez krawędź AD podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę prostopadłą do ściany bocznej BCP. Oblicz pole przekroju wyznaczonego przez tę płaszczyznę.

Zad. 10 (5 pkt.) W trapezie $ABCD$ o podstawach $|AB| > |CD|$, ramię BC ma długość 6. Na trapezie opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole i obwód trapezu, jeżeli

$$\sin|\measuredangle BAC| : \sin|\measuredangle ABC| = 1:3.$$

Zad. 11 (3 pkt.) Dla jakich wartości parametru rzeczywistego m wierzchołek paraboli

$$y = x^2 + 2(m+1)x + m - 4$$

leży najbliżej prostej $y = -4$?